Einführung in die Kunst mathematischer Ungleichungen

André Schlichting

S1G1 Sommersemester 2016

Cauchy-Schwarz

Für reelle Zahlen $\{a_i\}_{i=1}^n$ und $\{b_i\}_{i=1}^n$ gilt

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Cauchy-Schwarz

Für reelle Zahlen $\{a_i\}_{i=1}^n$ und $\{b_i\}_{i=1}^n$ gilt

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Wie funktioniert die Abschätzung?

Cauchy-Schwarz

Für reelle Zahlen $\{a_i\}_{i=1}^n$ und $\{b_i\}_{i=1}^n$ gilt

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Wie funktioniert die Abschätzung?

Beweis:

Fall $n = 2$: Es gilt

$$0 \leq (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = (a_1 b_2)^2 - 2(a_1 b_2)(a_2 b_1) + (a_2 b_1)^2$$

Cauchy-Schwarz

Für reelle Zahlen $\{a_i\}_{i=1}^n$ und $\{b_i\}_{i=1}^n$ gilt

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Wie funktioniert die Abschätzung?

Beweis:

Fall $n = 2$: Es gilt

$$0 \le (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = (a_1 b_2)^2 - 2(a_1 b_2)(a_2 b_1) + (a_2 b_1)^2$$

Damit folgt

Cauchy-Schwarz

Für reelle Zahlen $\{a_i\}_{i=1}^n$ und $\{b_i\}_{i=1}^n$ gilt

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Wie funktioniert die Abschätzung?

Beweis:

Fall $n = 2$: Es gilt

$$0 \leq (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = (a_1 b_2)^2 - 2(a_1 b_2)(a_2 b_1) + (a_2 b_1)^2$$

Damit folgt

$$(a_1 b_1)^2 + 2(a_1 b_2)(a_2 b_1) + (a_2 b_2)^2 \leq (a_1 b_1)^2 + (a_1 b_2)^2 + (a_2 b_1)^2 + (a_2 b_2)^2$$

Cauchy-Schwarz

Für reelle Zahlen $\{a_i\}_{i=1}^n$ und $\{b_i\}_{i=1}^n$ gilt

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Wie funktioniert die Abschätzung?

Beweis:

Fall $n = 2$: Es gilt

$$0 \leq (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = (a_1 b_2)^2 - 2(a_1 b_2)(a_2 b_1) + (a_2 b_1)^2$$

Damit folgt

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2).$$

Cauchy-Schwarz

Für reelle Zahlen $\{a_i\}_{i=1}^n$ und $\{b_i\}_{i=1}^n$ gilt

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Wie funktioniert die Abschätzung?

Beweis:

Fall $n = 2$: Es gilt

$$0 \leq (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 = (a_1 b_2)^2 - 2(a_1 b_2)(a_2 b_1) + (a_2 b_1)^2$$

Damit folgt

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2).$$

Für $n \geq 3$ per Induktion...

Cauchy-Schwarz

Für reelle Zahlen $\{a_i\}_{i=1}^n$ und $\{b_i\}_{i=1}^n$ gilt

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Was lernen wir aus der Abschätzung?

Falls die Reihen $\sum_{i=1}^\infty a_i^2$ und $\sum_{i=1}^\infty b_i^2$ endlich sind, dann ist auch die Reihe $\sum_{i=1}^\infty a_i b_i$ endlich.

Cauchy-Schwarz

Für reelle Zahlen $\{a_i\}_{i=1}^n$ und $\{b_i\}_{i=1}^n$ gilt

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Wann gilt Gleichheit?

Gleichheit gilt genau dann wenn es ein $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_i = \lambda b_i$ für all $i = 1, \ldots, n$ gilt.

Cauchy-Schwarz

Für reelle Zahlen $\{a_i\}_{i=1}^n$ und $\{b_i\}_{i=1}^n$ gilt

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Was sind weitere Abschätzungen die sich unmittelbar ergeben?

1-*Trick:* $b_i = 1$ für $i = 1, \ldots, n$

$$\sum_{i=1}^n a_i \leq \sqrt{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Cauchy-Schwarz

Für reelle Zahlen $\{a_i\}_{i=1}^n$ und $\{b_i\}_{i=1}^n$ gilt

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Was sind weitere Abschätzungen die sich unmittelbar ergeben?

Aufteilungstrick: $a_i = a_i^{\frac{1}{3}} a_i^{\frac{2}{3}}$

$$\sum_{i=1}^n a_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n a_i^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Cauchy-Schwarz

Für reelle Zahlen $\{a_i\}_{i=1}^n$ und $\{b_i\}_{i=1}^n$ gilt

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Kann diesselbe Technik auf andere Ungleichungen angewandt werden?

Für reelle Zahlen a, b und $x, y > 0$ gilt

$$\frac{(a+b)^2}{x+y} \leq \frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y}.$$

Ziele

- Kennenlernen von einigen Ungleichungen über Cauchy-Schwarz hinaus

Ziele

- Kennenlernen von einigen Ungleichungen über Cauchy-Schwarz hinaus
- Erlernen von systematischen Techniken zum Beweis

Ziele

- Kennenlernen von einigen Ungleichungen über Cauchy-Schwarz hinaus
- Erlernen von systematischen Techniken zum Beweis
- Ausblick auf Anwendungen in Analysis, Geometrie und Algebra

Ziele

- Kennenlernen von einigen Ungleichungen über Cauchy-Schwarz hinaus
- Erlernen von systematischen Techniken zum Beweis
- Ausblick auf Anwendungen in Analysis, Geometrie und Algebra
- Selbstständiges Erfassen und Aufbereiten eines Themas

Organisatorisches

Voraussetzungen

Analysis 1 & Lineare Algebra 1

Literatur

J. Michael Steele: *The Cauchy-Schwarz Master Class: An Introduction to the Art of Mathematical Inequalities*, 2004.

Vorbesprechung mit Themenvergabe

am Dienstag, 3. Februar, 16-18 c.t. im Raum 2.040.

`http://www.iam.uni-bonn.de/abteilung-mathphys/teaching/`