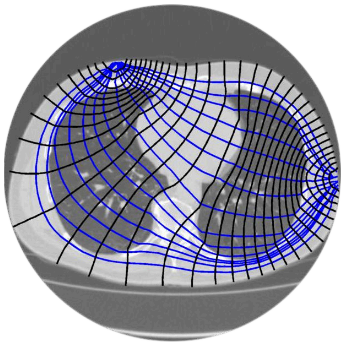
Seminar Funktionalanalysis: Inverse Probleme und Tarnkappen

WS 2013/2014

Prof. B. Niethammer, Dr. A. Schlichting (schlichting@iam.uni-bonn.de)

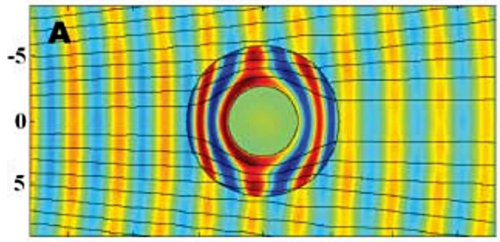
Das Seminar beginnt mit der funktionalanalytischen Seite der inversen Probleme. Es werden die Begriffe der wohl und schlecht gestellten Probleme behandelt und Fehlerarten besprochen. Danach wird eine systematische Herangehensweise zum Regularisieren inverser Probleme dargestellt. Basierend darauf wird der Tichonov-Regularisierer behandelt und ein Ausblick auf wichtige andere Regularisierer gegeben.

Im Anschluss daran wird das inverse Problem der elektrischen Impedanz-Tomografie untersucht. Für dieses bildgebende Verfahren werden über die Oberfläche $\partial\Omega$ eines Körpers Ω Messströme f eingebracht und die resultierende Potentialverteilung u an der Oberfläche gemessen. Ziel ist es, durch verschiedene solcher Messungen auf die Leitfähigkeitsverteilung σ im Inneren des Körpers zu schließen. Mathematisch formuliert heißt dieses Problem *Calderons Problem*: Wir betrachten das Neumann-Problem



$$\operatorname{div}(\sigma\nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega \qquad \text{und} \qquad \sigma\nabla u = f \quad \text{auf } \Omega.$$

Die resultierende messbare Potentialverteilung ist damit durch den Neumann-Dirichlet Operator $\Lambda_\sigma f := u|_{\partial\Omega}$ gegeben. Calderons Problem ist die Bestimmung von σ aus Λ_σ. Dies ist ein schlecht gestelltes nicht-lineares inverses Problem und wir werden dieses in linearisierter Form lösen.



Die Tarnung eines Gebietes ist möglich, da Calderons Problem schlecht gestellt ist. Ein Gebiet ist getarnt, falls sowohl der Inhalt als auch die Existenz der Tarnkappe nicht nachweisbar mittels elektromagnetischen Messungen ist. Es geht also darum Leitfähigkeitsverteilungen σ^* zu finden, sodass $\Lambda_{\sigma^*} f = \Lambda_{\sigma_0} f$ für alle Messströme f ist, wobei $\sigma_0 \equiv 1$ die Leitfähigkeit von Luft ist. Für die mathematische Konstruktion werden wir die Neumann-Dirichlet Abbildung besser verstehen und basierend darauf σ^* konstruieren. Mathematisch ideale Tarnkappen benötigen jedoch ein singuläres σ^*, d.h. Materialien mit verschwindender Leitfähigkeit. Deswegen werden wir *Beinahe-Tarnungen* konstruieren und die Qualität der Tarnung abschätzen.

Kursvoraussetzungen: Analysis I–III, Einführung PDG, paralleler Besuch der VL Funktionalanalysis wünschenswert

[1] A. Greenleaf et. al., *Invisibility and inverse problems*, Bulletin of the AMS, 46:1. 2008.
[2] A. Kirsch. *An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems, 2nd ed.* New York: Springer, 2001.
[3] R. V. Kohn et. al., *Cloaking via change of variables in electric impedance tomography*, Inv. Problems, 24:1, 2008.
[4] D. Schurig et. al., *Metamaterial electromagnetic cloak at microwave frequencies*, Science, 314:5801, 2006.